

# Теорема косинусів

Геометрія. 9 клас

# Теорема косинусів

- Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєних добуток цих сторін і косинуса кута між ними

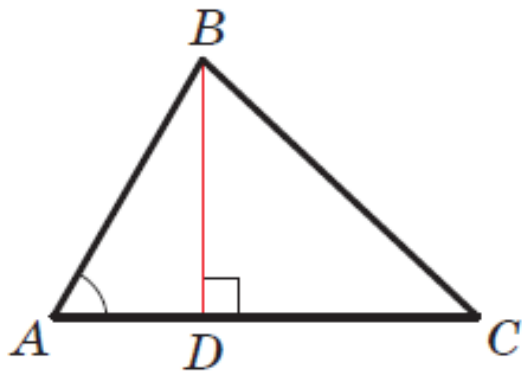


Рис. 2.1

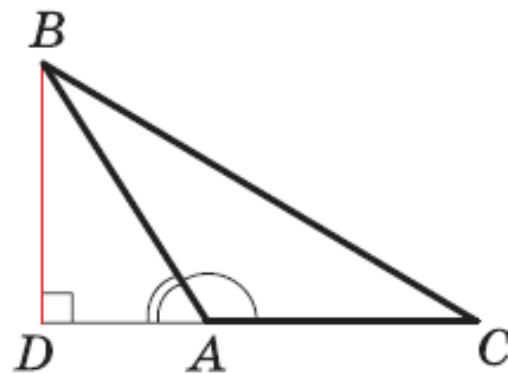


Рис. 2.2

# Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

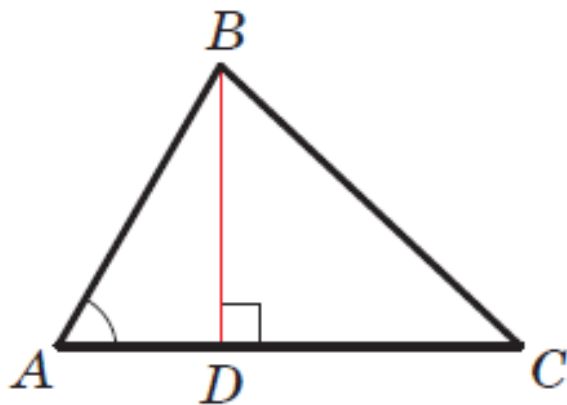


Рис. 2.1

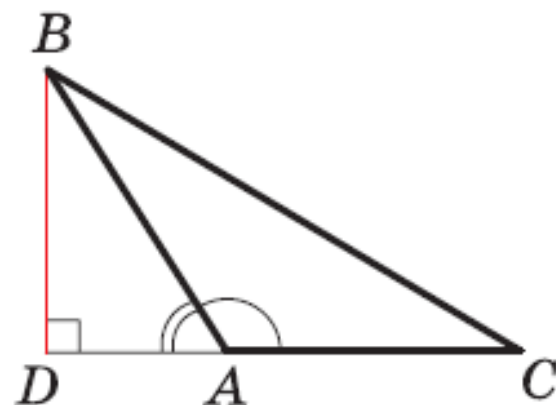


Рис. 2.2

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

# Теорема косинусів

*Перший випадок.* Нехай кут  $A$  гострий. Тоді хоча б один із кутів  $B$  або  $C$  є гострим.

• Нехай  $\angle C < 90^\circ$ . Проведемо висоту  $BD$ . Вона повністю належатиме трикутнику  $ABC$  (рис. 2.1).

У прямокутному трикутнику  $ABD$ :

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

У прямокутному трикутнику  $BDC$ :  $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$   
 $= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$   
 $= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$   
 $= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$   
 $= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$

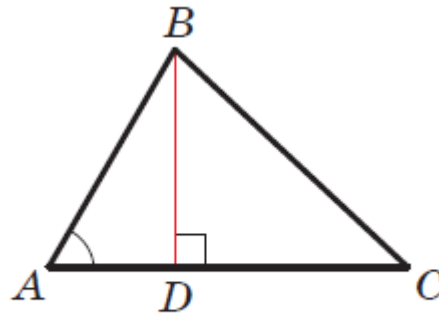


Рис. 2.1

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

# Теорема косинусів

*Другий випадок.* Нехай кут  $A$  тупий. Проведемо висоту  $BD$  трикутника  $ABC$  (рис. 2.2).

$$\begin{aligned} \text{У прямокутному трикутнику } ABD: BD &= AB \cdot \sin \angle BAD = \\ &= AB \cdot \sin (180^\circ - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC, \end{aligned}$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180^\circ - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

$$\begin{aligned} \text{У прямокутному трикутнику } BDC: BC^2 &= BD^2 + CD^2 = \\ &= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 = \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC. \end{aligned}$$

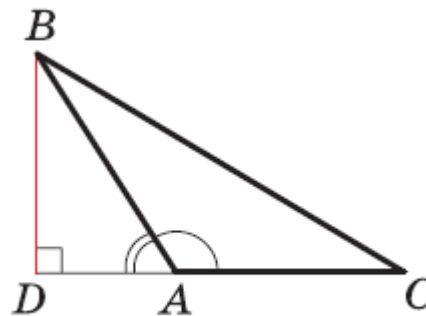


Рис. 2.2

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

# Теорема косинусів

**Теорема 2.2 (наслідок з теореми косинусів).** Нехай  $a, b$  і  $c$  — довжини сторін трикутника, причому  $a$  — довжина його найбільшої сторони. Якщо  $a^2 < b^2 + c^2$ , то трикутник є гострокутним. Якщо  $a^2 > b^2 + c^2$ , то трикутник є тупокутним. Якщо  $a^2 = b^2 + c^2$ , то трикутник є прямокутним.

2.1.° Знайдіть невідому сторону трикутника  $ABC$ , якщо:

- 1)  $AB = 5$  см,  $BC = 8$  см,  $\angle B = 60^\circ$ ;
- 2)  $AB = 3$  см,  $AC = 2\sqrt{2}$  см,  $\angle A = 135^\circ$ .

2.5.° Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють:

- 1) 5 см, 7 см і 9 см;
- 2) 5 см, 12 см і 13 см;
- 3) 10 см, 15 см і 18 см.